PhD, MBA Βεζέρης Δημήτριος

Επιχειρησιακή έρευνα.

ΔΙΕΘΝΕΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Lecture OR - Graphics & Simplex Method

Γραμμικός περογραμματισμός.

Ο **γραμμικός προγραμματισμός** (*Γ.Π., Linear Programming, L.P.*) ή αλλιώς **γραμμική βελτιστοποίηση**, είναι μέθοδος για την επίτευξη του καλύτερου αποτελέσματος (για παράδειγμα: μέγιστο κέρδος ή ελάχιστο κόστος) σε ένα μαθηματικό υπόδειγμα, του οποίου οι προϋποθέσεις (περιορισμοί) είναι ένα σύνολο γραμμικών σχέσεων των μεταβλητών του.

Πιο αυστηρά, ο γραμμικός προγραμματισμός είναι μία τεχνική για την μαθηματική βελτιστοποίηση μιας γραμμικής συνάρτησης δεδομένων κάποιων περιορισμών γραμμικών ισοτήτων ή γραμμικών ανισοτήτων.

Ο γραμμικός προγραμματισμός μπορεί να εφαρμοσθεί σε πληθώρα πεδίων. Χρησιμοποιείται ευρέως στην επιχειρησιακή έρευνα και στην οικονομία, καθώς επίσης και σε κάποια προβλήματα μηχανικής. Κάποιες βιομηχανίες που χρησιμοποιούν υποδείγματα γραμμικού προγραμματισμού είναι αυτές των μεταφορών, της ενέργειας και των τηλεπικοινωνιών.

Βήματα που Απαρτίζουν το Μαθηματικό Προγραμματισμό

• Μετατροπή ενός στατικού προβλήματος σε μαθηματικό μοντέλο που περιλαμβάνει όλα τα απαραίτητα

- A **linear function to be maximized**

  e.g. $f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$
- **Problem constraints** of the following form

  e.g.

  $$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leq b_3 \end{aligned}$$
- **Non-negative variables**

  e.g.

  $$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

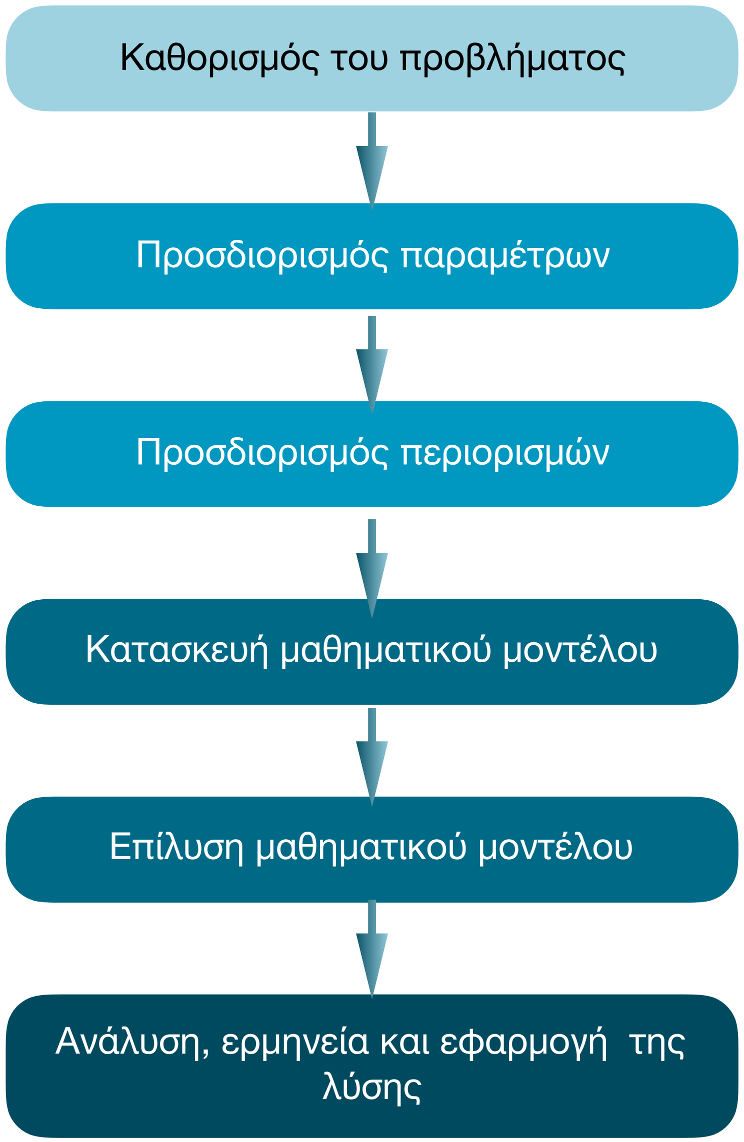
στοιχεία του προβλήματος

• Διερεύνηση των διαφορετικών λύσεων του προβλήματος

• Εύρεση της άριστης ή της πιο κατάλληλης λύσης

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός προϋποθέτει ότι όλες οι μαθηματικές συναρτήσεις του είναι γραμμικές.

Από το βιβλίο: Κώστογλου, Β. (2015). Επιχειρησιακή Έρευνα. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Τζιόλα και από τη Wikipedia



Ένα παράδειγμα μοντελοποίησης

Παράδειγμα **γραμμικού προγράμματος**, το κλασικό πλέον πρόβλημα της δίαιτας.

Ας υποθέσουμε ότι ο ελάχιστος αριθμός των θερμίδων που μπορούμε να λαμβάνουμε καθημερινά είναι ορισμένος. Επίσης, σε καθημερινή βάση απαιτείται να προσλαμβάνουμε μια ελάχιστη ποσότητα πρωτεϊνών και ασβεστίου, ενώ παράλληλα επιθυμούμε να δαπανούμε το ελάχιστο δυνατό ποσό κάθε μέρα. Ο πίνακας του σχήματος απεικονίζει τις παρεχόμενες πρωτεΐνες και ασβέστιο (σε miligrams ανά μερίδα) που εξασφαλίζει συγκεκριμένη ποσότητα (δηλαδή, η τυπική δοσολογία) κάθε είδους τροφής που έχουμε στη διάθεσή μας, καθώς επίσης και τις θερμίδες που περιέχουν. Η τελευταία γραμμή του πίνακα απεικονίζει τις καθημερινές μας απαιτήσεις σε θερμίδες, πρωτεΐνες και ασβέστιο.

Είδος τροφής	Δοσολ.	Θερμ.(Kcal)	Πρωτ.(gr)	Ασβ.(mg)	Τιμή(ευρώ)
(1) Δημητριακά	28 γρ.	110	4	2	0.3
(2) Κοτόπουλο	100 γρ.	205	32	12	2.4
(3) Αβγά	2	160	13	54	1.3
(4) Γάλα	237κ.ε.	160	8	285	0.9
(5) Γλυκό	170 γρ.	420	4	22	2.0
(6) Χοιρινό	260 γρ.	260	14	80	1.9
Απαιτήσεις		2000	55	800	

Ο πίνακας με τα στοιχεία του παραδείγματος για το πρόβλημα της Δίαιτας.

Ας υποθέσουμε ότι από το i-στό είδος τροφής χρησιμοποιούμε xi δόσεις (δηλαδή, τόσες φορές επί τη δοσολογία που ορίζει ο πίνακας). Τότε εύκολα εκφράζει κανείς τους περιορισμούς που περιγράφει η τελευταία γραμμή του πίνακα ως εξής :

110x1 + 205x2 + 160x3 + 160x4 + 420x5 + 260x6 ≥ 2000

4x1 +32x2 +13x3 +8x4 +4x5 +14x6 ≥ 55

2x1 +12x2 +54x3 +285x4 +22x5 +80x6 ≥ 800

Από τις σημειώσεις του Κοντογιάννη Σ. «Γραμμικός προγραμματισμός». (2009).

Θυμηθείτε όμως ότι επιθυμούμε να πληρώνουμε το ελάχιστο δυνατό ποσό ημερησίως, συνεπώς ο στόχος μας είναι ο εξής:

min(Z) = 0.3x1 + 2.4x2 + 1.3x3 + 0.9x4 + 2x5 + 1.9x6

Φυσικά, δεν είναι δυνατόν να καταναλώνουμε αρνητικές ποσότητες τροφών.

$$\begin{array}{rl} \textbf{minimize} & 0.3x_1 + 2.4x_2 + 1.3x_3 + 0.9x_4 + 2x_5 + 1.9x_6 \\ \textbf{subject to}: & 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000 \\ & 4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55 \\ & 2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{array}$$

Το γραμμικό πρόγραμμα που αναπαριστά το πρόβλημα της Δίαιτας.

Η γραφική μέθοδος και η μέθοδος Simplex

Θα εξετάσουμε τη γραφική μέθοδο και τη μέθοδο Simplex μέσω του κάτωθι παραδείγματος.

Μοντελοποίηση του προβλήματος

Σε ένα εργοστάσιο πλεκτών παράγονται ανδρικές μπλούζες και παιδικές.

Για κάθε ανδρική μπλούζα το κέρδος είναι 8 ευρώ και για κάθε παιδική είναι 12 ευρώ.

Για το κόψιμο χρειάζονται 20 λεπτά οι αντρικές και 60 λεπτά οι παιδικές.

Για το ράψιμο χρειάζονται 70 λεπτά οι αντρικές και 60 λεπτά οι παιδικές.

Για το σιδέρωμα-πακετάρισμα χρειάζονται 12 λεπτά οι αντρικές και 4 λεπτά οι παιδικές.

Για το κόψιμο είναι διαθέσιμες 1000 ώρες

Για τη ράψιμο είναι διαθέσιμες 1400 ώρες

Για το σιδέρωμα και πακετάρισμα είναι διαθέσιμες 200 ώρες

Να βρεθεί η επιθυμητή παραγωγή για το μέγιστο κέρδος.

Έστω **x1** η ποσότητα παραγωγής ανδρικών μπλουζών και **x2** η ποσότητα παιδικών.

Λαμβάνοντας υπόψη το κέρδος για κάθε μπλούζα, η συνάρτηση που μας δίνει το συνολικό κέρδος είναι το άθροισμα των γινομένων των ποσοτήτων των προϊόντων με την αξία του κέρδους. Πχ για τις ανδρικές μπλούζες το κέρδος είναι Ποσότητα x 8 ευρώ άρα 8* X1. Έτσι το συνολικό κέρδος είναι

Z = x1 x 8ευρώ + x2 X 12 ευρώ

ήτοι ψάχνουμε το **max** (**z**) = 8***x1** + 12***x2**

με τους περιορισμούς

20 * **x1** + 60 * **x2** <= 60000 (1000 ώρες X 60 λεπτά)

70 * **x1** + 60 * **x2** <= 84000 (1400 ώρες X 60 λεπτά)

12 * **x1** + 4 * **x2** <= 12000 (200 ώρες X 60 λεπτά)

Δεν υπάρχουν αρνητικές ποσότητες, κατά συνέπεια :

x1,x2,x3 >=0 .

Η γραφική μέθοδος

Θα σχεδιάσουμε τις ευθείες (συναρτήσεις) των περιορισμών σε καρτεσιανό διάγραμμα.

20 * **x1** + 60 * **x2** <= 60000

θέτοντας **x1=0** τότε 0+60χ2=60000 -> **x2** = 60000/60 = **1000** και έχω το σημείο **(0,1000)**

Επίσης θέτοντας **x2=0** τότε 20*x1 + 0 = 60000 -> **x1** = 60000/20 = **3000 και έχω το σημείο (3000,0).**

Μπορώ με τα δύο σημεία να σχεδιάσω την πρώτη ευθεία περιορισμού, την A - B από τα σημεία A(0,1000) και B (3000,0) όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

Για τον επόμενο περιορισμό, ομοίως:

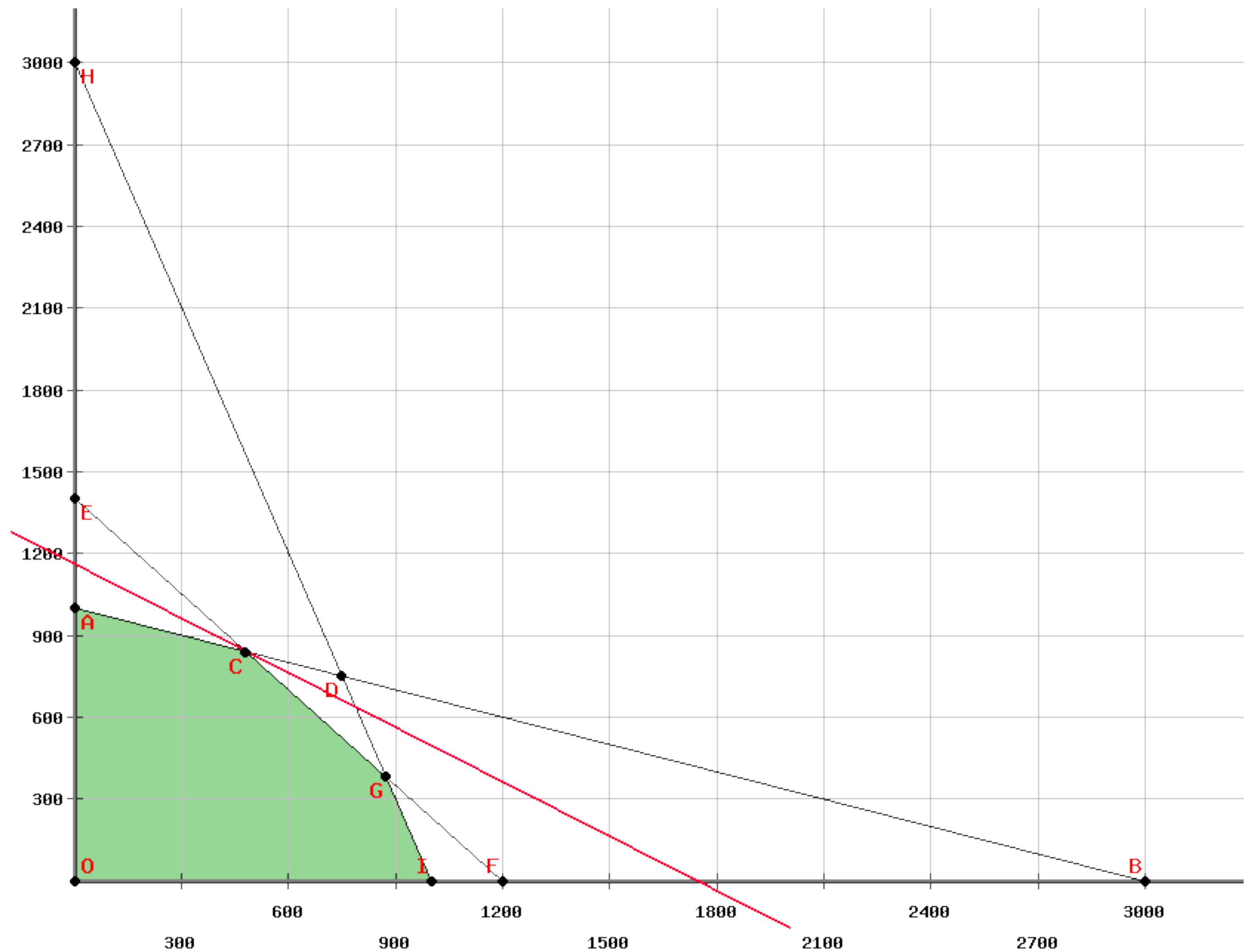
70 * **x1** + 60 * **x2** <= 84000

θέτοντας **x1=0** τότε 0+60χ2=84000 -> **x2** = 84000/60 = **1400** και έχω το σημείο **(0,1400)**

Επίσης θέτοντας **x2=0** τότε 70*x1 + 0 = 84000 -> **x1** = 84000/70 = **1200 και έχω το σημείο (1200,0).**

Μπορώ με τα δύο σημεία να σχεδιάσω την δεύτερη ευθεία περιορισμού, την A - B από τα σημεία E(0,1400) και F (1200,0) όπως φαίνεται στο διάγραμμα.

Οι δύο αυτές γραμμές τέμνονται στο C, δημιουργώντας το τμήμα A-C.



Η γραφική μέθοδος.... συνέχεια

Συνεχίζουμε το σχεδιασμό των περιορισμών, δηλαδή τις ευθείες (συναρτήσεις) σε καρτεσιανό διάγραμμα.

12 * **x1** + 4 * **x2** <= 12000

θέτοντας **x1=0** τότε 0+4χ2=12000 -> **x2** = 12000/4 = **3000** και έχω το σημείο **(0,3000)**

Επίσης θέτοντας **x2=0** τότε 12*x1 + 0 = 12000 -> **x1** = 12000/12 = **1000 και έχω το σημείο (1000,0).**

Μπορώ με τα δύο σημεία να σχεδιάσω την ευθεία περιορισμό την H - I από τα σημεία H(0,3000) και I (1000,0) όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

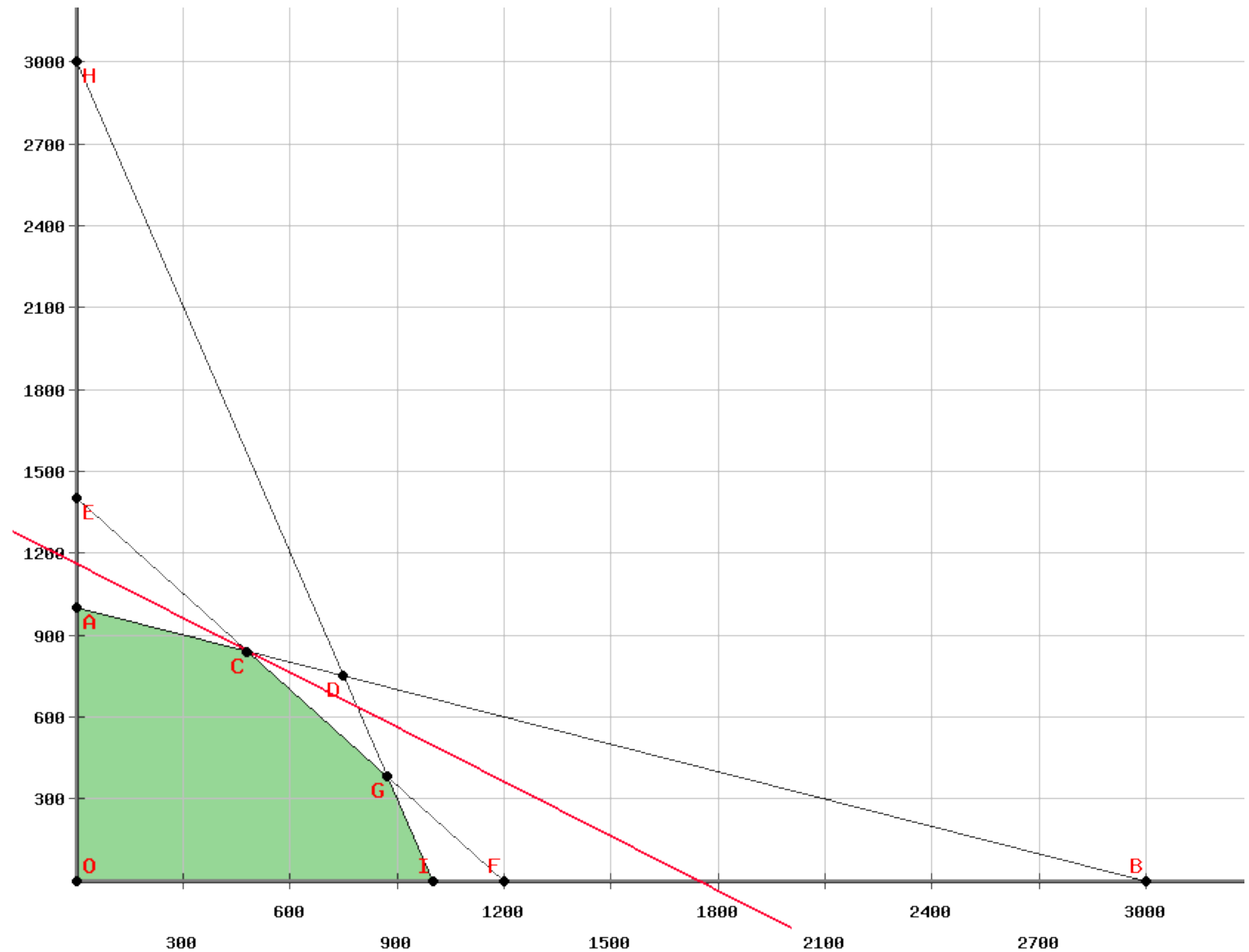
Όλες αυτές οι γραμμές τέμνονται πλέον και στοG , δημιουργώντας τελικά τα τμήματα A-C-G-I.

Λόγω του ότι **x1,x2,x3 >=0 δουλεύω στο 1ο τεταρτημόρια μεταξύ των θετικών τιμών των x1 (οριζόντιος άξονας) και x2 (κάθετος άξονας)**.

Λαμβάνοντας υπόψη τη συνάρτηση μεγιστοποίησης, Z = 8 * x1 + 12 * x2, πολλαπλασιάζω τους συντελεστές (8 X 12) = 96 και θέτω :

96 = 8 * X1 + 12 * x2 όπου :

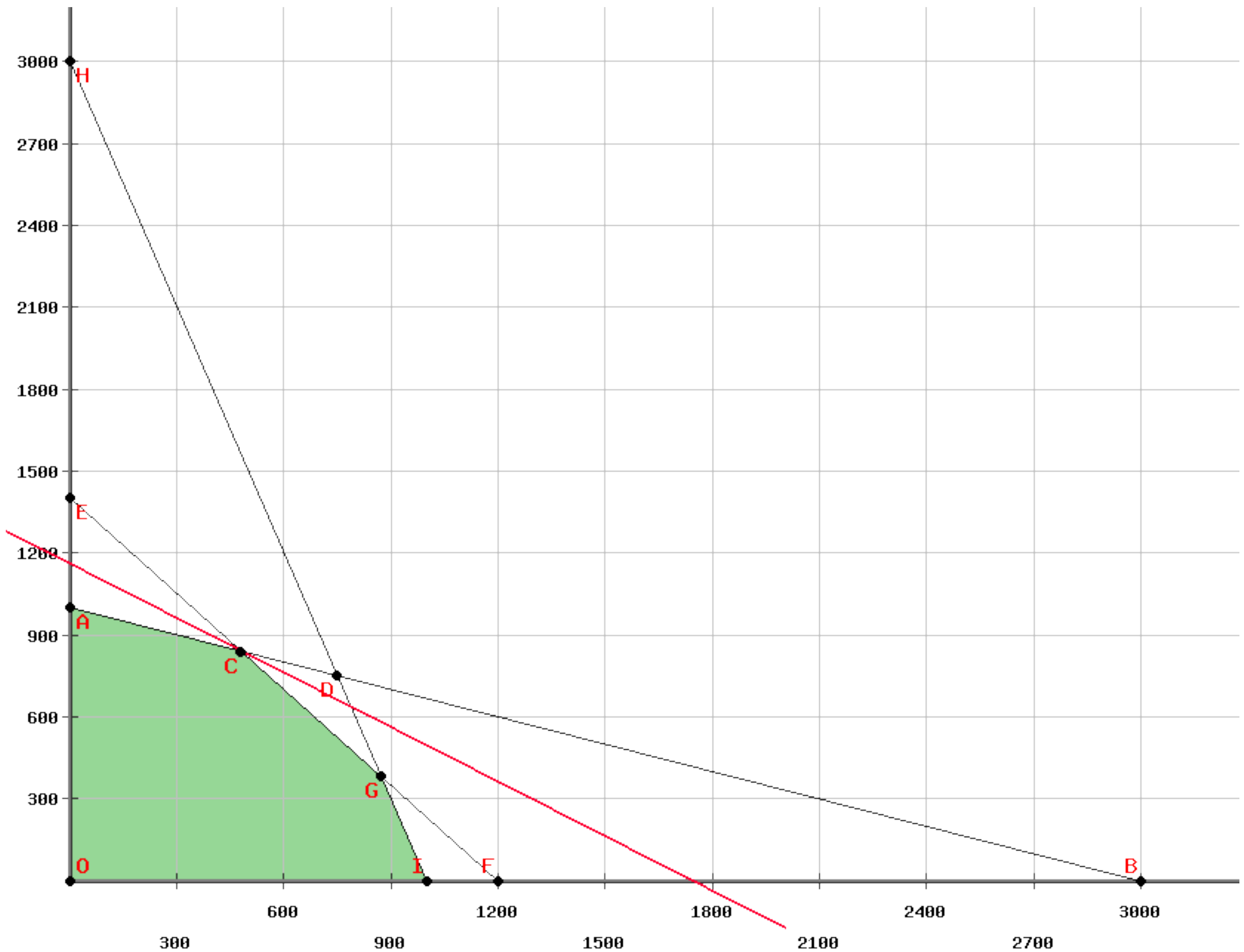
Για X1=0 τότε X2 = 8 και για X2=0 τότε X1=12 οπότε έχω τα σημεία (0,8) και (12,0). Επειδή είναι πολύ μικρές οι τιμές θα μπορούσα να βάλω 9600 ώστε να βγούν τα ζευγάρια (**0,800**) και (**1200,0**) ώστε να μπορώ να σχεδιάσω την ευθεία καλύτερα.



Η γραφική μέθοδος.... συνέχεια

Με τα ζευγάρια (**0,800**) και (**1200,0**) προκύπτει η ευθεία μεγιστοποίησης (δεν υπάρχει στο διάγραμμα), όπου φαίνεται η κλίση της. Φέρνοντας παράλληλες θα διαπίστωνε ότι σύγκλίνω στο σημείο C το οποίο φαίνεται απ΄όταν παρακάτω πίνακα:

Όλο η πράσινη περιοχή ονομάζεται περιοχή αποδεκτών λύσεων και όσες είναι στο τμήμα A-C-G-I είναι οι μεγαλύτερες δυνατές λύσεις. Έτσι η τιμή μεγιστοποίησης βρίσκεται πάντα στο περίγραμμα της περιοχής από τον άξονα Y μέχρι τον άξονα X.



Point	X coordinate (X_1)	Y coordinate (X_2)	Value of the objetive function (Z)
O	0	0	0
A	0	1000	12000
B	3000	0	24000
C	480	840	13920
D	750	750	15000
E	0	1400	16800
F	1200	0	9600
G	872.72727272727	381.81818181818	11563.636363636
H	0	3000	36000
I	1000	0	8000

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, η συντεταγμένες του C, αν σχεδιάσουμε τις ευθείες, θα δούμε ότι είναι (480,840), τις οποίες βάζοντας στην εξίσωση μεγιστοποίησης κέρδους έχω:

max (**z**) = 8***x1** + 12***x2** = 8x480 + 12x840 = **13920**

το οποίο είναι και το μέγιστο κέρδος από την παραγωγή **480 ανδρικών** και **840 παιδικών** μπλουζών. Τα σχήματα δημιουργήθηκαν με τη χρήση του http://www.phpsimplex.com/simplex/grafico2.php?

Κανονική μορφή για Simplex

Για να προχωρήσουμε στη δημιουργία των ταμπλό της μεθόδου Simplex, θα πρέπει να ξαναγράψουμε τις εξισώσεις σε κανονική μορφή. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να βρούμε τρόπο να φύγουν οι ανισότητες και να προκύψουν εξισώσεις.

Ξαναγράφουμε τις ανισώσεις στη μορφή:

20 * **x1** + 60 * **x2** + 1 * **S1** = 60000

70 * **x1** + 60 * **x2** + 1 * **S2**. = 84000

12 * **x1** + 4 * **x2** + 1 * **S3** = 12000.

Δεν υπάρχουν αρνητικές ποσότητες, κατά συνέπεια :

x1,x2,S1,S2,S3 >=0 .

Οι νέες μεταβλητές S1,S2,S3 που συμπεριλάβαμε, αντιπροσωπεύουν τις ώρες που δε θα αξιοποιήσουμε για παραγωγή στο κάθε τμήμα.

Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι για παράδειγμα στο κοπτήριο, θα αναλωθούν 20*__x1__ λεπτά για παραγωγή ανδρικών μπλουζών, 60*__x2__ λεπτά για την παραγωγή παιδικών και **S1** λεπτά χωρίς παραγωγή από τα **60000** λεπτά που είναι διαθέσιμα κ.ο.κ.

Στη συνάρτηση μεγιστοποίησης, μεταφέρουμε όλα τα στοιχεία από την πλευρά του z:

z - 8*__x1__ - 12*__x2__ **= 0.**

Έτσι λοιπόν έχουμε δημιουργήσει εξισώσεις οι οποίες θα μας βοηθήσουν να βρούμε την βέλτιστη λύση χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Simplex.

Για να μεταφέρουμε όλους τους συντελεστές στο ταμπλό της Simplex, αρκεί πλέον να προσθέσουμε σε όλες τις εξισώσεις, όλες τις μεταβλητές με μηδενικούς συντελεστές, ήτοι:

20 * **x1** + 60 * **x2** + 1 * **S1** + 0 * **S2** + 0 * **S3** = 60000

70 * **x1** + 60 * **x2** + 0 * **S1** + 1 * **S2** + 0 * **S3**. = 84000

12 * **x1** + 4 * **x2** + 0 * **S1** + 0 * **S2** + 1 * **S3** = 12000.

z - 8*__x1__ - 12*__x2__ + 0*__S1__ + 0*__S2__ + 0*__S3__ **= 0.**

x1,x2,S1,S2,S3 >=0

Ταμπλό Simplex σε δύο φάσης.

Τώρα πλέον μπορούμε να μεταφέρουμε όλους τους συντελεστές στο ταμπλό της Simplex.

	X1	X2	S1	S2	S3	Constant values	Rows
S1	20	60	1	0	0	60000	R1
S2	70	60	0	1	0	84000	R2
S3	12	4	0	0	1	12000	R3
z	-8	-12	0	0	0	0	R4

Πίνακας 1. Simplex method Tableau 1

Για να προχωρήσουμε στο πρώτο βήμα, επιλέγουμε από την τελευταία σειρά R4 τη στήλη με το μικρότερο συντελεστή.

Δηλαδή μεταξύ των -8 και -12 συντελεστών της συνάρτησης μεγιστοποίησης, επιλέγουμε το **-12**.

Έτσι επιλέγουμε τη στήλη του **x2** την οποία ονομάζουμε **στήλη οδηγό**.

Στη συνέχεια διαιρούμε όλες τις σταθερές τιμές (constant values) με το αντίστοιχο συντελεστή της στήλης οδηγού.

60000/60 = **1000**

84000/60 = 1400

12000/4 = 3000

Από αυτές τις διαιρέσεις επιλέγουμε τη σειρά με το μικρότερο πηλίκο και την ονομάζουμε σειρά οδηγό. Στην περίπτωσή μας είναι η σειρά R1.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

	X1	X2	S1	S2	S3	Constant values	Rows	Divide by pivot column factors	Result after division
S1	20	60	1	0	0	60000	R1	Div(60000/60)=	**1000**
S2	70	60	0	1	0	84000	R2	Div(84000/60)=	1400
S3	12	4	0	0	1	12000	R3	Div(12000/4)=	3000
z	-8	**-12**	0	0	0	0	R4		

Πίνακας 2. Simplex method Tableau 1-1

Σε Ρόζ φαίνεται η στήλη που έχουμε επιλέξει και με γαλάζιο η γραμμή που έχουμε επιλέξει. Το στοιχείο στην τομή της γραμμής και της στήλης και συγκεκριμένα το στοιχείο S1,X2 είναι το στοιχείο οδηγός ήτοι το **60.**

Η πρώτη φάση ολοκληρώθηκε. Η δεύτερη φάση που θα περάσουμε, περιλαμβάνει το μετασχηματισμό του πίνακα με νέους συντελεστές, χρησιμοποιώντας αρχικά το στοιχείο οδηγό.

Ταμπλό Simplex - δεύτερη φάση.

Τώρα πλέον μπορούμε να μετασχηματίσουμε τους συντελεστές στο ταμπλό της Simplex, βελτιστοποιώντας τη λύση.

	X1	X2	S1	S2	S3	Constant values	Rows	Formulas
S1	0,333333333333333	1	0,0166666666666667	0	0	1000	R1	(R1)/60->new(R1)
S2	70	60	0	1	0	84000	R2	
S3	12	4	0	0	1	12000	R3	
z	-8	-12	0	0	0	0	R4	

Πίνακας 3. Simplex method Tableau 2

Για να προχωρήσουμε στο πρώτο βήμα της δεύτερης φάσης, διαιρούμε όλη τη σειρά R1 με το στοιχείο οδηγό. Αυτό θα επιφέρει την αλλαγή στην πρώτη γραμμή προς την βελτιστοποίηση της λύσης που αναζητούμε.

Δηλαδή το στοιχείο S1,X1 το διαιρούμε με το 60, το S1,X2 το διαιρούμε με το 60, το S1,X3 το διαιρούμε με το 60, και το S1,S1 το διαιρούμε με το 60. Επίσης το στοιχείο Constant value το διαιρούμε με το 60. Δηλαδή ή νέα σειρά R1 θα προκύψει διαιρώντας την υφιστάμενη R1 με το 60.

H formula σημειώνεται στην τελευταία στήλη ως new(R1)=(R1)/60

Ολοκληρώνοντας το μετασχηματισμό της R1, θα χρησιμοποιήσουμε την νέα αυτή σειρά (εξίσωση) για να μετασχηματίσουμε όλες τις υπόλοιπες, βάσει αυτής.

Ο στόχος είναι στις υπόλοιπες εξισώσεις των σειρών R2 & R3 να μηδενίσουμε όλους τους συντελεστές του X2.

	X1	X2	S1	S2	S3	Constant values	Rows	Formulas
X2	0,333333333333333	1	0,0166666666666667	0	0	1000	R1	
S2	50	0	-1	1	0	24000	R2	(R2)-60(R1)->new(R2)
S3	10,6666666666667	0	-0,0666666666666668	0	1	8000	R3	(R3)-4(R1)->new(R3)
z	-4	0	0,2	0	0	12000	R4	(z)+12(R1)->new(z)

Πίνακας 4. Simplex method Tableau 2-1

Έτσι (βλέπε πίνακα 3) μπορούμε χρησιμοποιώντας την R1, να την πολλαπλασιάσουμε με 60 και να την αφαιρέσουμε από την R2. Έτσι θα προκύψει η νέα R2 και θα μηδενιστεί ο συντελεστής της μεταβλητής X2. Οπότε η πράξη είναι (R2)-60(R1)=new(R3). Αντίστοιχα (R3)-4(R1)=new(R3). *Βλέπε πίνακα 4.*

Το τελευταίο στάδιο της δεύτερης φάσης είναι να μηδενίσουμε το μικρότερο συντελεστή (τον μεγαλύτερο αρνητικό) της z χρησιμοποιώντας την R1. Έτσι βλέπουμε ότι πολλαπλασιάζοντας με 12 την R1 και προσθέτοντάς την στην R4, μηδενίζεται το συντελεστής του X2 που είναι -12. Κατά συνέπεια new(R4)=new(z)=(R4)+12(R1).Επίσης αντικαθιστούμε τη S1 με τη X2 στην 1η στήλη. Έτσι προκύπτει ο πίνακας 4.

Αυτές είναι οι δύο φάσεις που επαναλάμβάνονται έως να μην υπάρχει αρνητικός συντελεστής στην εξίσωση z στην τελευταία γραμμή.

ΠΡΟΣΟΧΗ!. Διαιρούμε όλα τα στοιχεία των γραμμών ασύμφωνο με τις συναρτήσεις που υπολογίζουμε, συμπεριλαμβανομένων των constant values.

Ταμπλό Simplex συνέχεια.............

Το νέο ταμπλό της Simplex είναι όπως ο πίνακας 5.

	X1	X2	S1	S2	S3	Constant values	Rows
X2	0,333333333333333	1	0,0166666666666667	0	0	1000	R1
S2	50	0	-1	1	0	24000	R2
S3	10,6666666666667	0	-0,0666666666666668	0	1	8000	R3
z	-4	0	0,2	0	0	12000	R4

Πίνακας 5. Simplex method Tableau 2-1

Για να προχωρήσουμε στο πρώτο βήμα, επιλέγουμε από την τελευταία σειρά R4 τη στήλη με το μικρότερο συντελεστή.

Δηλαδή μεταξύ των -4 και 0 συντελεστών της συνάρτησης μεγιστοποίησης, επιλέγουμε το **-4**.

Έτσι επιλέγουμε τη στήλη του **x1** την οποία ονομάζουμε **στήλη οδηγό**.

Στη συνέχεια διαιρούμε όλες τις σταθερές τιμές (constant values) με το αντίστοιχο συντελεστή της στήλης οδηγού.

1000/0,33 =   3000

24000/50 =   480

8000/10,66 =   750

Από αυτές τις διαιρέσεις επιλέγουμε τη σειρά με το μικρότερο πηλίκο και την ονομάζουμε σειρά οδηγό. Στην περίπτωσή μας είναι η σειρά R2.

Έτσι προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

	X1	X2	S1	S2	S3	Constant values	Rows	Divide by pivot column factors	Result after division
X2	0,333333333333333	1	0,0166666666666667	0	0	1000	R1	Div(1000/0,33)=	3000
S2	50	0	-1	1	0	24000	R2	Div(24000/50)=	480
S3	10,6666666666667	0	-0,0666666666666668	0	1	8000	R3	Div(8000/10,66)=	749,9999999
z	-4	0	0,2	0	0	12000	R4		

Πίνακας 6. Simplex method Tableau 2-2

Σε Ρόζ φαίνεται η στήλη που έχουμε επιλέξει και με γαλάζιο η γραμμή που έχουμε επιλέξει. Το στοιχείο στην τομή της γραμμής και της στήλες και συγκεκριμένα το στοιχείο S2,X1 είναι το στοιχείο οδηγός ήτοι το **50.**

Η πρώτη φάση και πάλι ολοκληρώθηκε. Η δεύτερη φάση που θα περάσουμε, περιλαμβάνει ξανά το μετασχηματισμό του πίνακα με νέους συντελεστές, χρησιμοποιώντας αρχικά το στοιχείο οδηγό.

Ταμπλό Simplex συνέχεια...........

Τώρα πλέον μπορούμε να μετασχηματίσουμε τους συντελεστές στο ταμπλό της Simplex, βελτιστοποιώντας τη λύση.

	X1	X2	S1	S2	S3	Constant values	Rows	Formulas
X2	0,333333333333333	1	0,0166666666666667	0	0	1000	R1	
X1	1	0	-0,02	0,02	0	480	R2	(R2)/50->new(R3)
S3	10,6666666666667	0	-0,0666666666666668	0	1	8000	R3	
z	-4	0	0,2	0	0	12000	R4	

Πίνακας 7. Simplex method Tableau 3

Για να προχωρήσουμε ξανά στο πρώτο βήμα της δεύτερης φάσης, διαιρούμε όλη τη σειρά R2 με το στοιχείο οδηγό (το 50). Αυτό θα επιφέρει την αλλαγή στη δεύτερη γραμμή προς την βελτιστοποίηση της λύσης που αναζητούμε. Αντικαθιστώ τη S1 με τη X1.

Δηλαδή το στοιχείο X1,X1 το διαιρούμε με το 50, το X1,X2 το διαιρούμε με το 50, το X1,X3 το διαιρούμε με το 50, και το X1,S1 το διαιρούμε με το 50. Επίσης το στοιχείο Constant value το διαιρούμε με το 50. Δηλαδή ή νέα σειρά R2 θα προκύψει διαιρώντας την υφιστάμενη R2 με το 50.

Η formula σημειώνεται στην τελευταία στήλη ως new(R2)=(R2)/50.

Ολοκληρώνοντας το μετασχηματισμό της R2, θα χρησιμοποιήσουμε την νέα αυτή σειρά (εξίσωση) για να μετασχηματίσουμε όλες τις υπόλοιπες, βάσει αυτής.

Ο στόχος είναι στις υπόλοιπες εξισώσεις των σειρών R1 & R3 να μηδενίσουμε όλους τους συντελεστές του X1.

-	X1	X2	S1	S2	S3	Constant values	Rows	Formulas
X2	-0,000000000000000	1	0,0233333333333334	-0,00	0	840	R1	R1-1/3R2->new(R1)
X1	1	0	-0,02	0,02	0	480	R2	
S3	0	0	0,146666666666667	-0,21	1	2879,9999	R3	R3-10,6666666666667R2->new(R2)
z	0	0	0,12	0,08	0	13920	R4	z+4R2->new(z)

Πίνακας 8. Simplex method Tableau 3-1

Έτσι (βλέπε πίνακα 7) μπορούμε χρησιμοποιώντας την R2, να την πολλαπλασιάσουμε με 1/3 και να την αφαιρέσουμε από την R1. Έτσι θα προκύψει η νέα R1 και θα μηδενιστεί ο συντελεστής της μεταβλητής X1. Οπότε η πράξη είναι (R1)-1/3(R2)=new(R1). Αντίστοιχα (R3)-10,66(R2)=new(R2). *Βλέπε πίνακα 8.*

Το τελευταίο στάδιο της δεύτερης φάσης είναι να μηδενίσουμε το μικρότερο συντελεστή (τον μεγαλύτερο αρνητικό) της z χρησιμοποιώντας την R2. Έτσι βλέπουμε ότι πολλαπλασιάζοντας με 4 την R2 και προσθέτοντάς την στην R4, μηδενίζεται ο συντελεστής του X1 που είναι -4. Κατά συνέπεια new(R4)=new(z)=(R4)+4(R2).Έτσι προκύπτει ο πίνακας 8.

Στο συγκεκριμένο στάδιο ολοκληρώνεται η διαδικασία, λόγω μη ύπαρξης αρνητικών αριθμών στην εξίσωση z.

Μέθοδος Simplex.

Ο πίνακας που έχουμε καταλήξει είναι ο πίνακας 8.

Simplex method Tableau 3-1-1

	X1	X2	S1	S2	S3	Constant values	Rows
X2	-0.00000000000000033333333	1	0.0233333333333334	-0.00666666666666667	0	840	R1
X1	1	0	-0.02	0.02	0	480	R2
S3	0	0	0.146666666666667	-0.213333333333334	1	2879.99999999998	R3
z	0	0	0.12	0.08	0	13920	R4

Όπως φαίνεται στον τελικό πίνακα όπου κανένας συντελεστής της συνάρτησης **z** δεν είναι αρνητικός, το μέγιστο κέρδος μπορεί να είναι **13.920**.

Στην αριστερή πρώτη στήλη οι μεταβλητές που έμειναν είναι η **X1** και **X2** με τιμές **480** και **840** αντίστοιχα. Όλες οι άλλες μεταβλητές θέτονται ίσες με το μηδέν ήτοι X3=S1=S2=S3=0.

Από τη συνάρτηση μεγιστοποίησης επαληθεύεται ότι:

max (**z**) = 8***x1** + 12***x2** = 8x480 + 12x840 = 13920

το οποίο είναι και το μέγιστο κέρδος από την παραγωγή **480 ανδρικών** και **840 παιδικών** μπλουζών..

Η μέθοδος Simplex

Περισσότερες πηγές για μάθηση:

1 Μάθημα στο YouTube

Αλγόριθμος Μεθόδου Simplex

https://www.youtube.com/watch?v=dg9xl7NpRyk

2 Μαθήματα στο YouTube

The Simplex Method - Finding a Maximum / Word Problem Example, 5 X Parts

https://www.youtube.com/watch?v=gRgsT9BB5-8

https://www.youtube.com/watch?v=yL7JByLlfrw

https://www.youtube.com/watch?v=vVzjXpwW2xI&t=11s

https://www.youtube.com/watch?v=lPm46c1pfvQ&t=3s

https://www.youtube.com/watch?v=WeK4JjNLSgw