

OR - Αλγόριθμος Dijkstra

Αλγόριθμοι συντομότερης διαδρομής

Οι πιο γνωστοί αλγόριθμοι επίλυσης δικτύων είναι οι αλγόριθμοι Dijkstra και Floyd. Εδώ εξετάζουμε τον αλγόριθμο Dijkstra θεωρώντας ότι ο αλγόριθμος Floyd εντάσσεται στον Dijkstra.

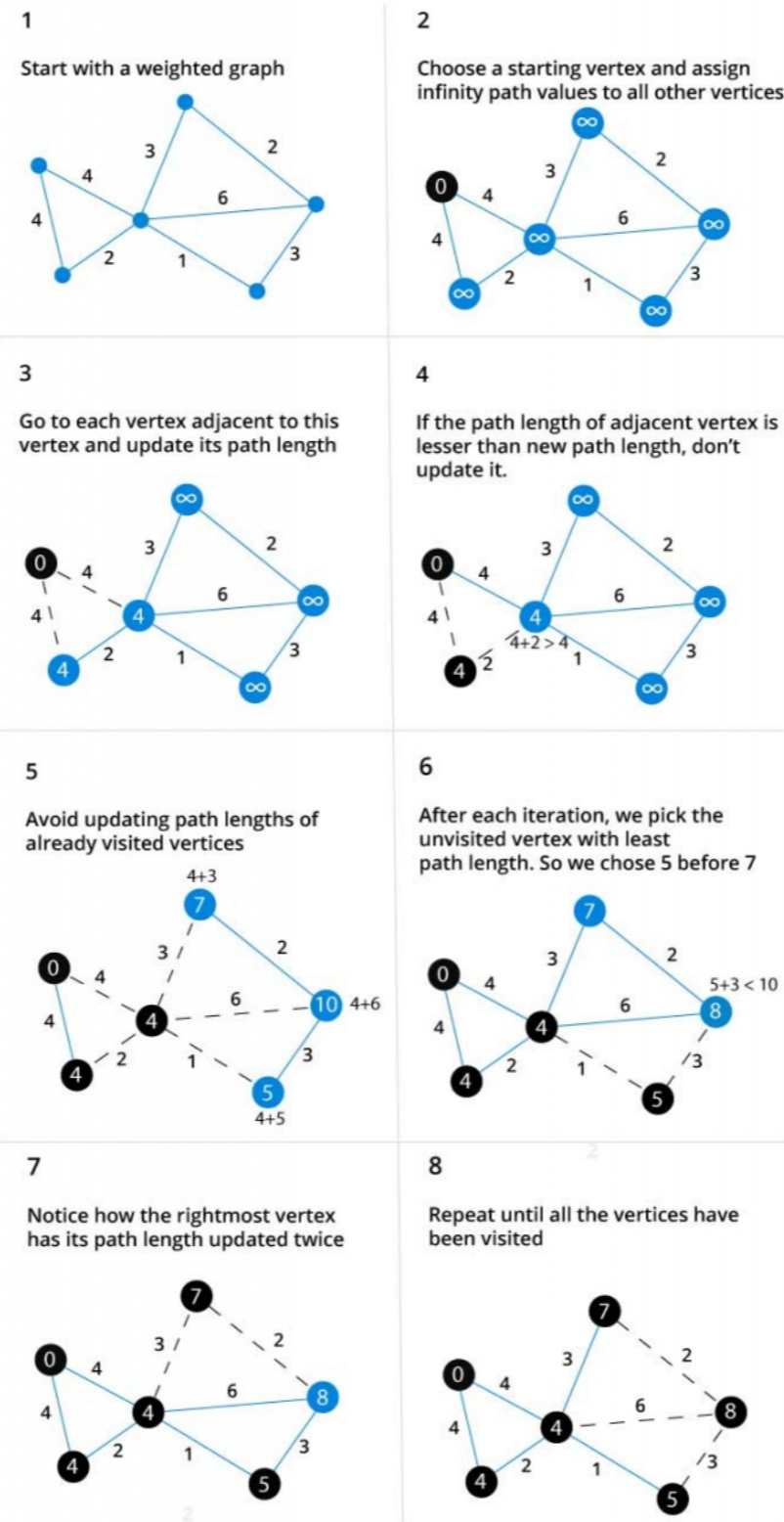
Αλγόριθμος Dijkstra

Έστω U_i είναι η συντομότερη απόσταση από τον κόμβο πηγή 1 στον κόμβο i και ορίζουμε $D(i,j)$ (≥ 0) ως το βάρος την ακμής (i,j) . Ο αλγόριθμος ορίζει την την προσωρινή ετικέτα για έναν άμεσα διαδοχικό κόμβο ως:

$$U(i,j) = [i, U_i + D(i,j)], D(i,j) \geq 0.$$

Η ετικέτα για τον κόμβο εκκίνησης είναι η $[-,0]$, δηλώνοντας ότι αυτός ο κόμβος δεν έχει προηγούμενο και ότι η απόσταση (βάρος) από τον προηγούμενο είναι μηδέν. Η προσωρινή ετικέτα ενός κόμβου γίνεται μόνιμη, αν δεν υπάρχει καμία άλλη με μικρότερη απόσταση από αυτήν, για αυτόν τον κόμβο.

Έτσι λοιπόν έχουμε:



Αρχικό βήμα

Βάζουμε ετικέτα στον κόμβο - πηγή $[-,0]$. Βάζουμε σε όλους τους υπόλοιπους κόμβους την ετικέτα $[-,\infty]$, που ορίζει στην αρχικά άπειρη την απόσταση από την πηγή (μεγαλύτερη δεν υπάρχει, συνεπώς όλες οι υπόλοιπες που μπορούν να υπολογιστούν θα είναι μικρότερες). Θέτουμε επόμενο βήμα το $i=1$.

Βήμα i (γενικά)

1. Υπολογίζουμε τις προσωρινές ετικέτες $[i, U_i + D(i,j)]$, των άμεσα επόμενων διασυνδεδεμένων κόμβων με τον προηγούμενο, και τις **αναγράφουμε** σε αυτούς, μόνο σε περίπτωση που δεν υπάρχει άλλη ετικέτα, εκτός αν η νέα ετικέτα έχει μικρότερο βάρος, από την τελευταία προσωρινή.

2. Εάν όλοι οι κόμβοι έχουν μόνιμη ετικέτα, τότε σταματάμε τον αλγόριθμο. Αν όχι τότε επιλέγουμε την προσωρινή ετικέτα $U[s,r]$ με το μικρότερο βάρος, τη θέτουμε σε μόνιμη και θέτουμε $i = r$ και επαναλαμβάνουμε το βήμα i .

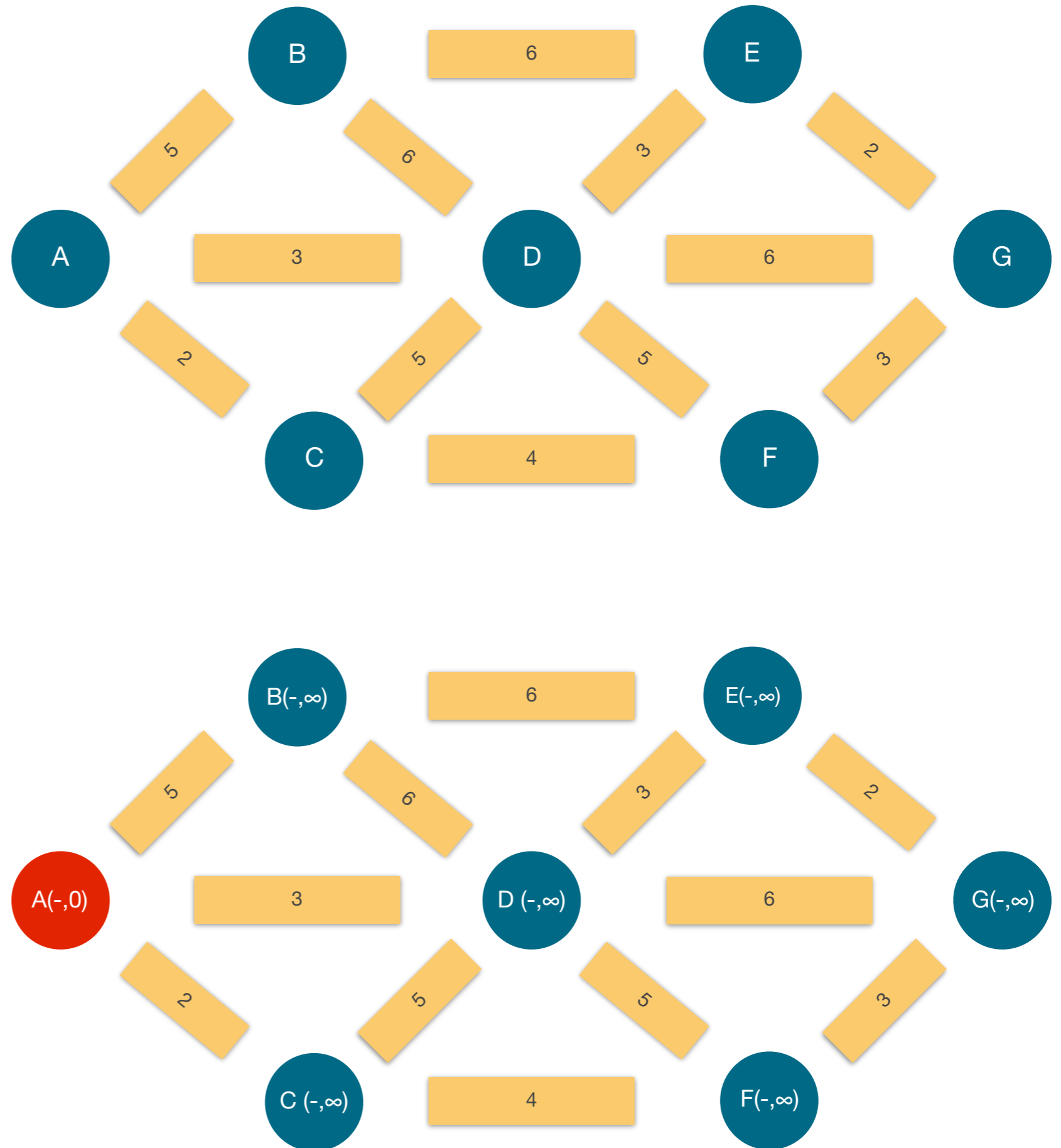
Εφαρμογή αλγορίθμου Dijkstra

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο στο διπλανό δίκτυο. Θέλουμε να βρούμε την διαδρομή από το A στο G με το μικρότερο βάρος.

Αρχικά θα τοποθετήσουμε την ετικέτα στον κόμβο πηγή με μηδενικό βάρος.

Σε όλους τους άλλους κόμβους θα τοποθετήσουμε την ετικέτα με την άπειρη απόσταση.

Ο κόμβος που λαμβάνει **μόνιμη** ετικέτα είναι ο κόμβος πηγή - αφετηρία, διότι δεν πρόκειται να υπάρξει μικρότερο του μηδενός βάρος από προηγούμενο κόμβο, διότι δεν υπάρχει προηγούμενος κόμβος.



Εφαρμογή αλγορίθμου Dijkstra

Βήμα 1

Στη συνέχεια, βλέπουμε τους επόμενους από την πηγή κόμβους B,C και D οι οποίοι έχουν αντίστοιχα νέα βάρη,

Κόμβος B: βάρος κόμβου A + απόσταση A,B = $0+5=5$,

Κόμβος C: βάρος κόμβου A + απόσταση A,C = $0+2=2$ και

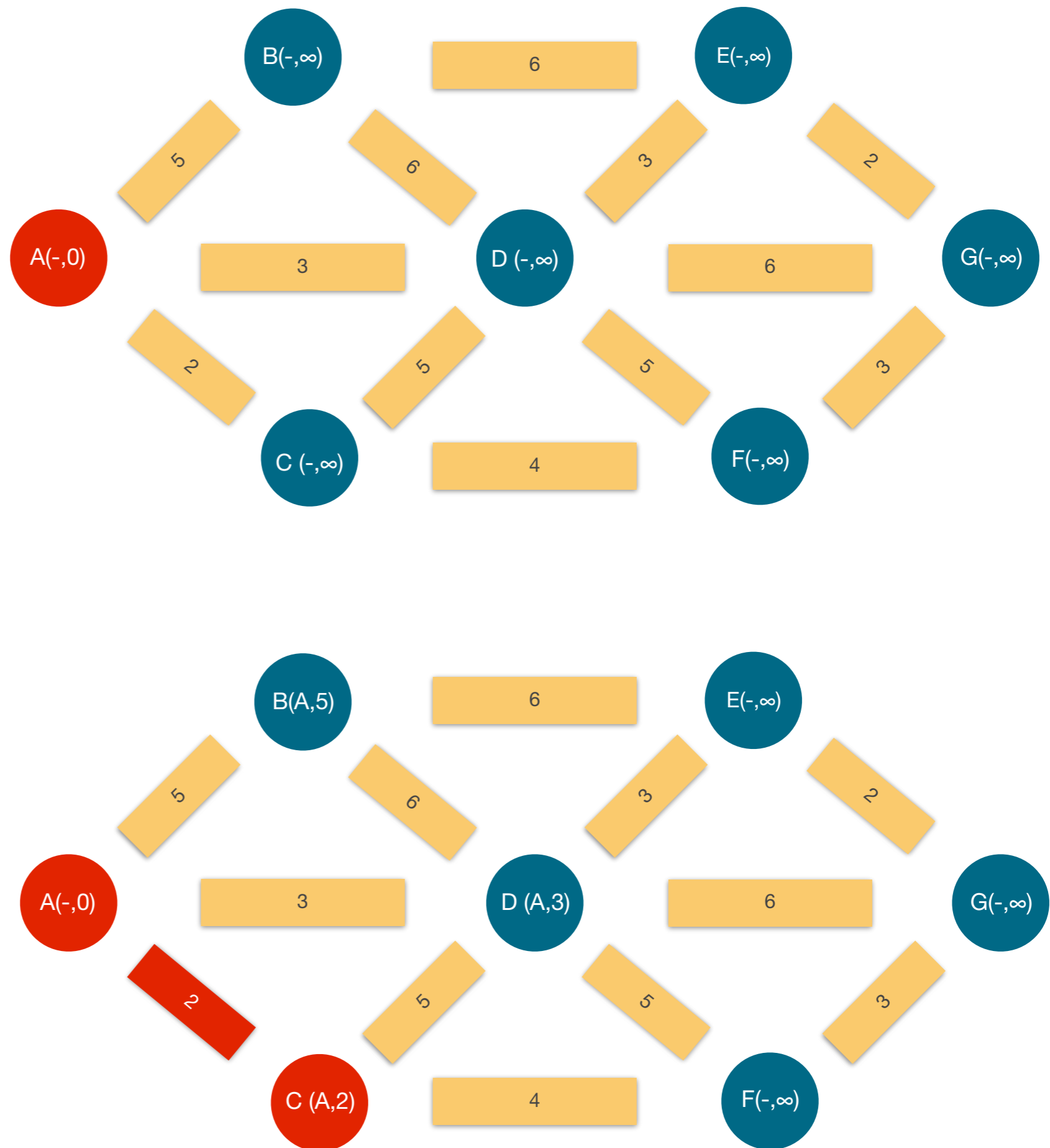
Κόμβος D: βάρος κόμβου A + απόσταση A,D = $0+3=3$.

Λόγω του ότι τα βάρη αυτά είναι μικρότερα από το άπειρο, θα αντικατασταθούν και οι τρεις ετικέτες με τις νέες προσωρινές.

Βήμα 2

Από όλους τους κόμβους B,C,D,E,F και G ο C έχει τη μικρότερη απόσταση (2), οπότε η ετικέτα του γίνεται μόνιμη.

Επίσης σημειώνουμε την μικρότερη απόσταση με κόκκινο.



Εφαρμογή αλγορίθμου Dijkstra

Βήμα 1

Στη συνέχεια, βλέπουμε τους επόμενους από τον κόμβο C κόμβους D και F οι οποίοι έχουν αντίστοιχα νέα βάρη,

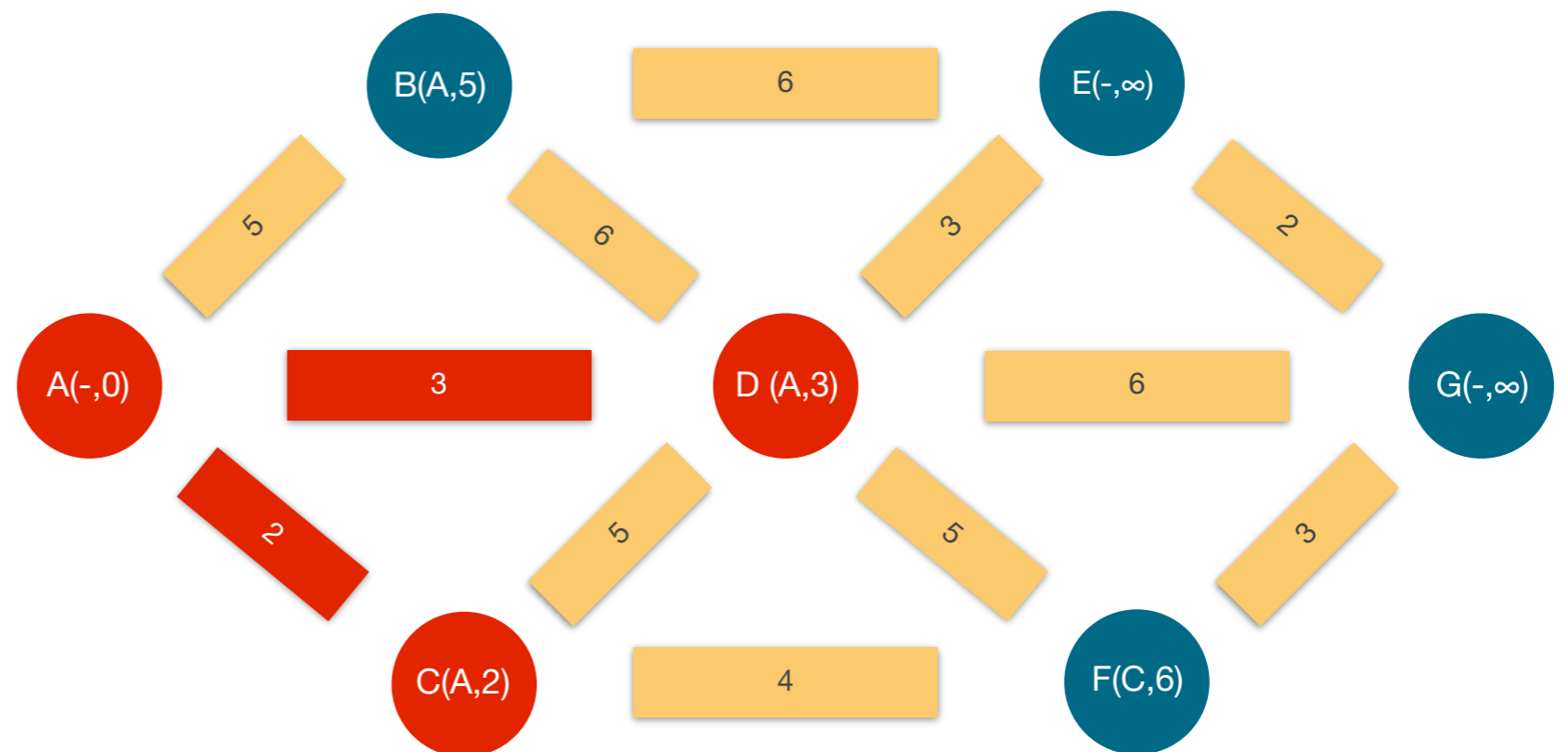
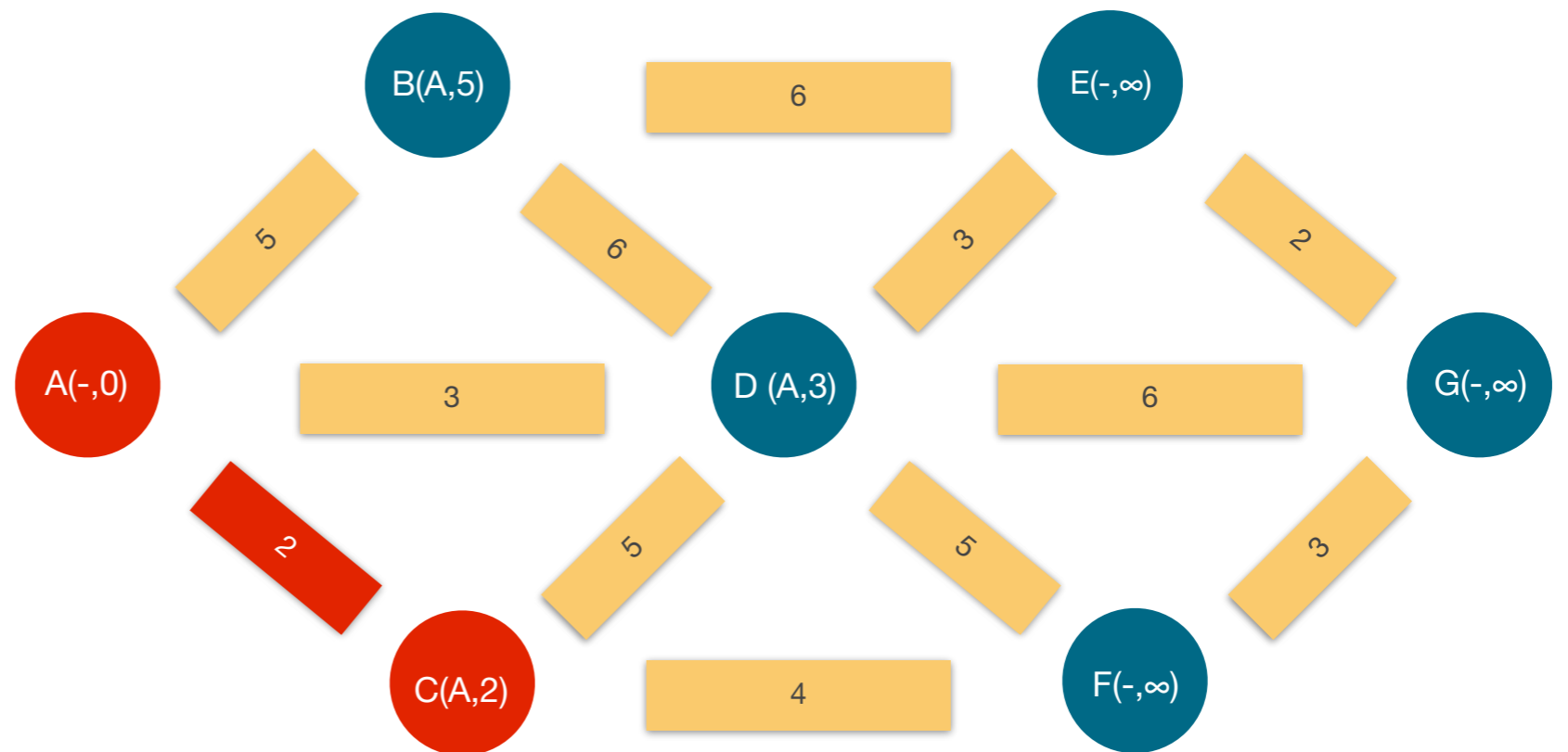
Κόμβος D: βάρος κόμβου C + απόσταση C,D = $2+5=7$, το οποίο είναι μεγαλύτερο του 3, οπότε και δεν αντικαθίστανται,

Κόμβος F: βάρος κόμβου C + απόσταση C,F = $2+4=6$.

Βήμα 2

Από όλους τους κόμβους με προσωρινές ετικέτες B,D,E,F και G ο D έχει τη μικρότερη απόσταση (3), οπότε η ετικέτα του γίνεται μόνιμη.

Επίσης σημειώνουμε την μικρότερη απόσταση (3) με κόκκινο.



Εφαρμογή αλγορίθμου Dijkstra

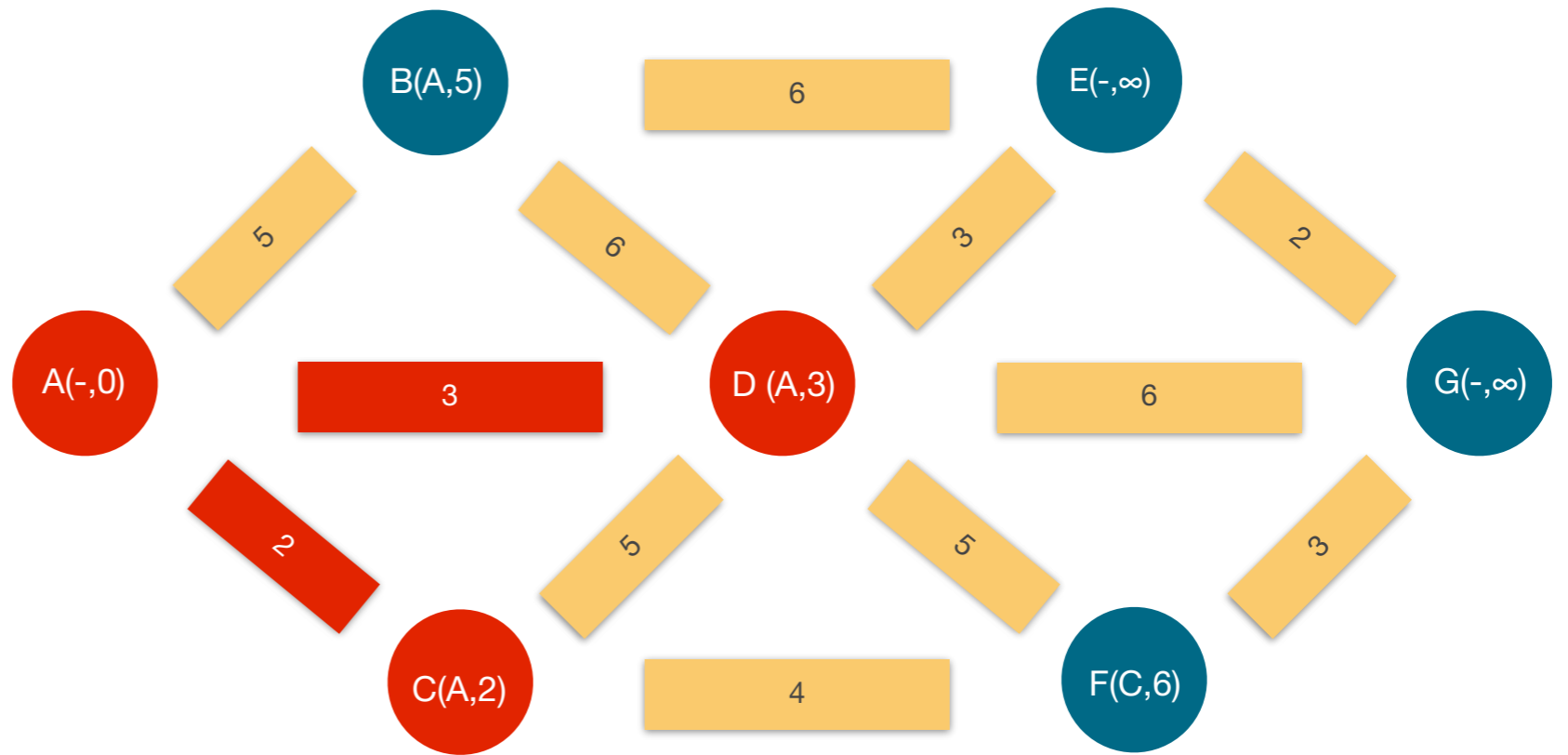
Βήμα 1

Στη συνέχεια, βλέπουμε τους επόμενους από τον κόμβο D, κόμβους E,F και G οι οποίοι έχουν αντίστοιχα νέα βάρη,

Κόμβος E: βάρος κόμβου D + απόσταση D,E = $3+3=6$, όπου αντικαθιστά το άπειρο βάρος,

Κόμβος F: βάρος κόμβου D + απόσταση D,F = $3+5=8$. Λόγω του ότι $8 > 6$ δεν αντικαθιστούμε την ετικέτα και

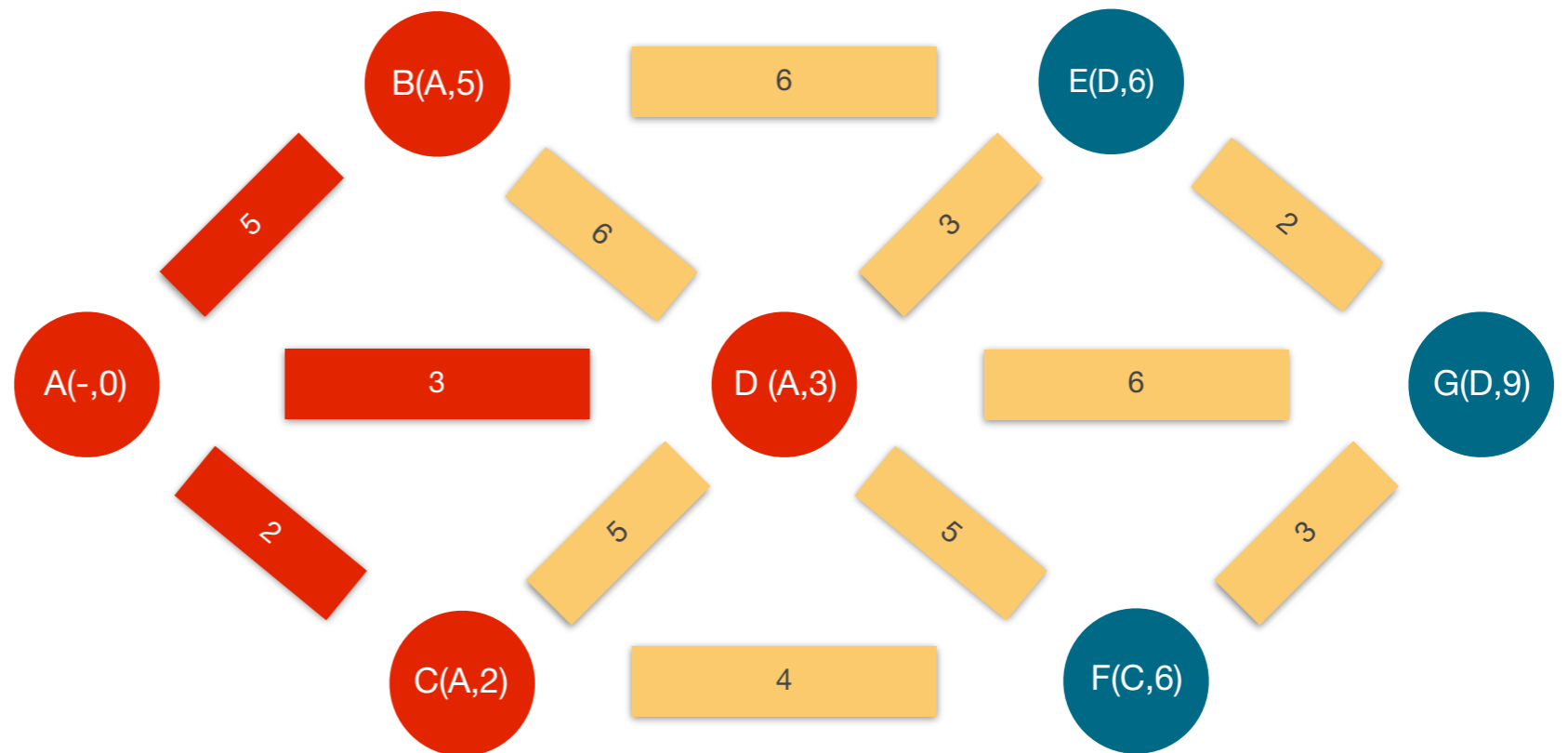
Κόμβος G: βάρος κόμβου D + απόσταση D,G = $3+6=9$, όπου αντικαθιστά το άπειρο βάρος.



Βήμα 2

Από όλους τους κόμβους B,E,F και G ο B έχει τη μικρότερη απόσταση (5), οπότε η ετικέτα του γίνεται μόνιμη.

Επίσης σημειώνουμε την μικρότερη απόσταση με κόκκινο.



Εφαρμογή αλγορίθμου Dijkstra

Βήμα 1

Στη συνέχεια, βλέπουμε τους επόμενους από τον κόμβο B, κόμβους D και E οι οποίοι έχουν αντίστοιχα νέα βάρη,

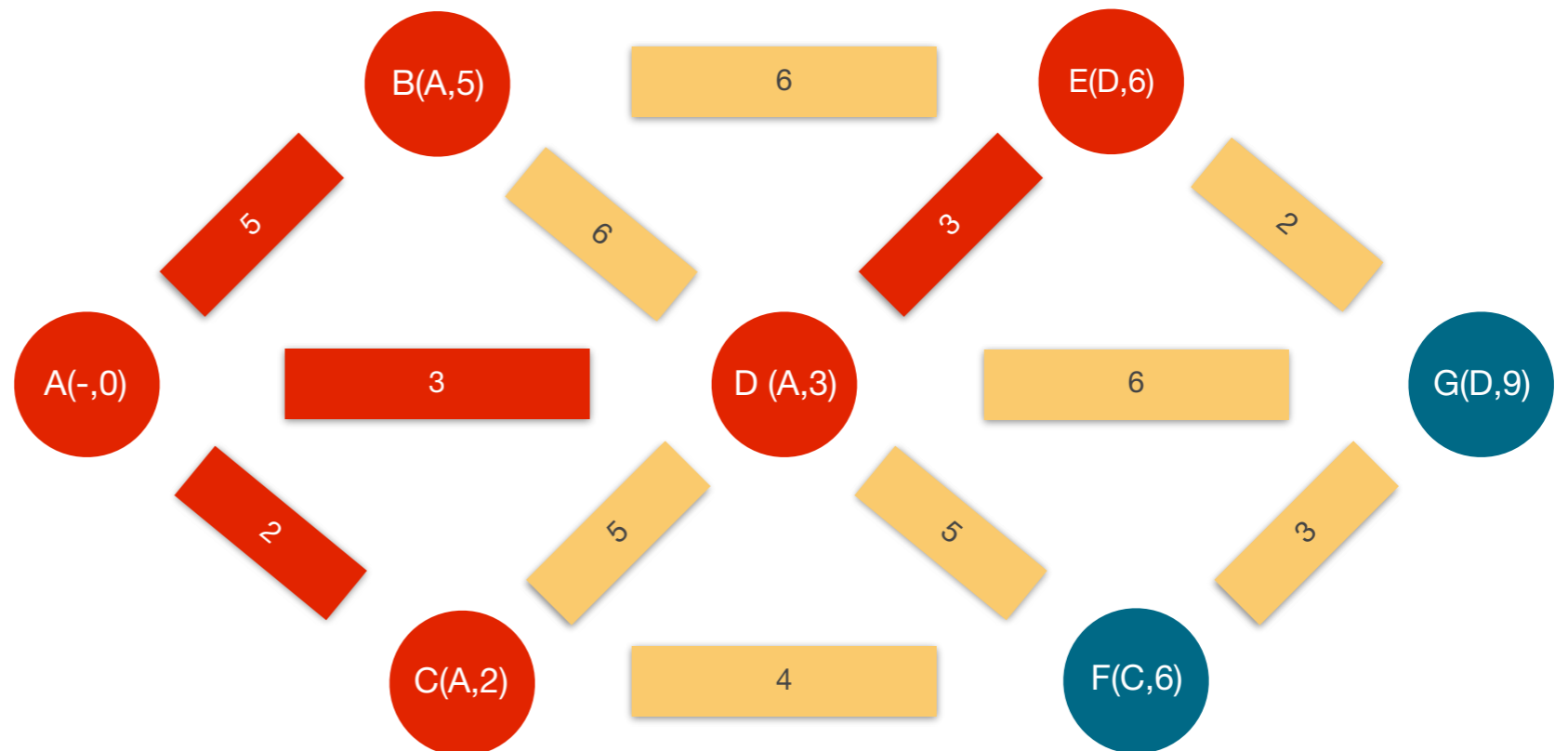
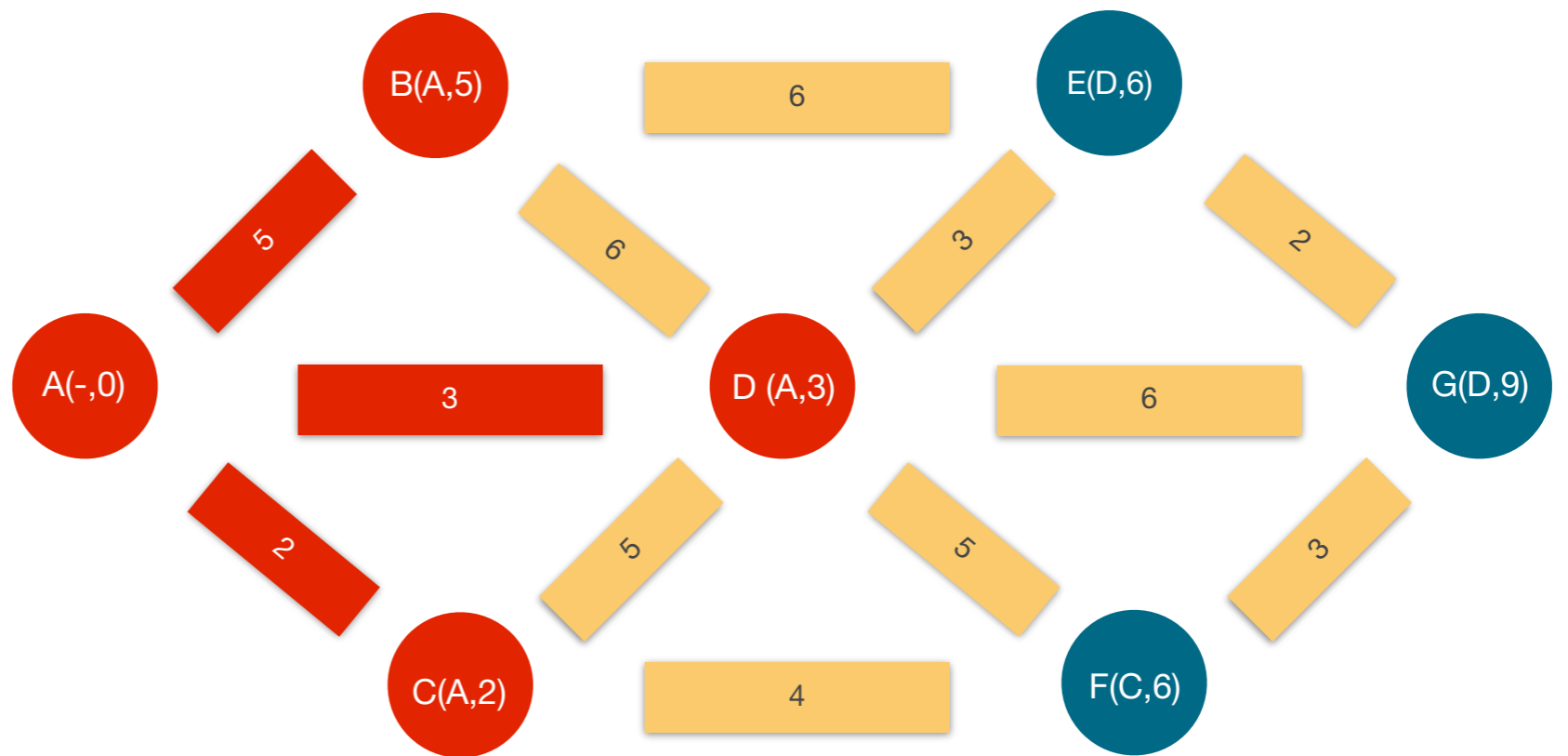
Κόμβος D: δεν εξετάζεται λόγω μόνιμης ετικέτας,

Κόμβος E: βάρος κόμβου B + απόσταση B,E = $5+6=11$. Λόγω του ότι $11 > 6$ δεν αντικαθιστούμε την ετικέτα.

Βήμα 2

Από όλους τους κόμβους E,F και G ο E και F έχουν τη μικρότερη απόσταση (6), οπότε διαλέγουμε όποιο θέλουμε αυθαίρετα πχ το E και ετικέτα του γίνεται μόνιμη.

Επίσης σημειώνουμε την μικρότερη απόσταση με κόκκινο.



Εφαρμογή αλγορίθμου Dijkstra

Βήμα 1

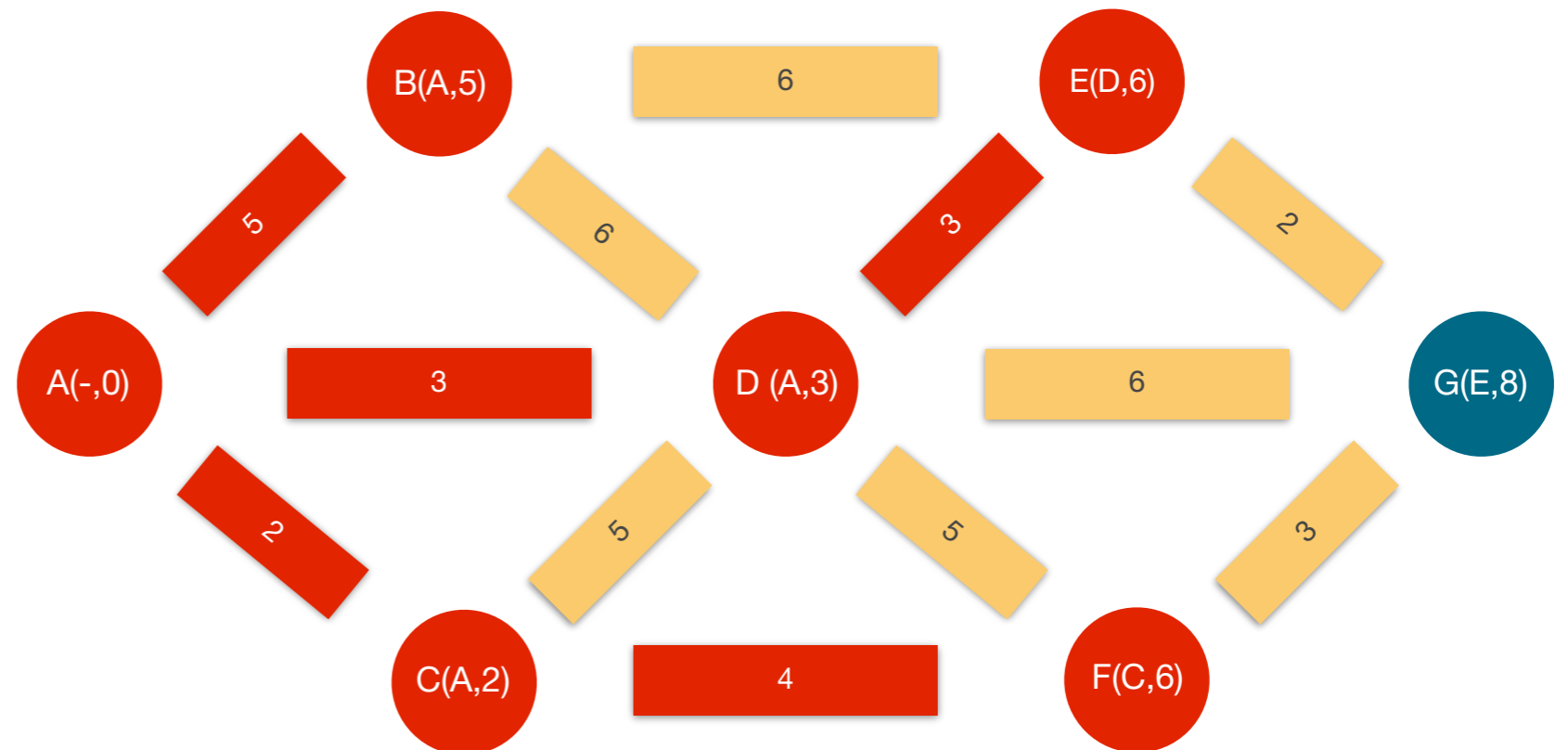
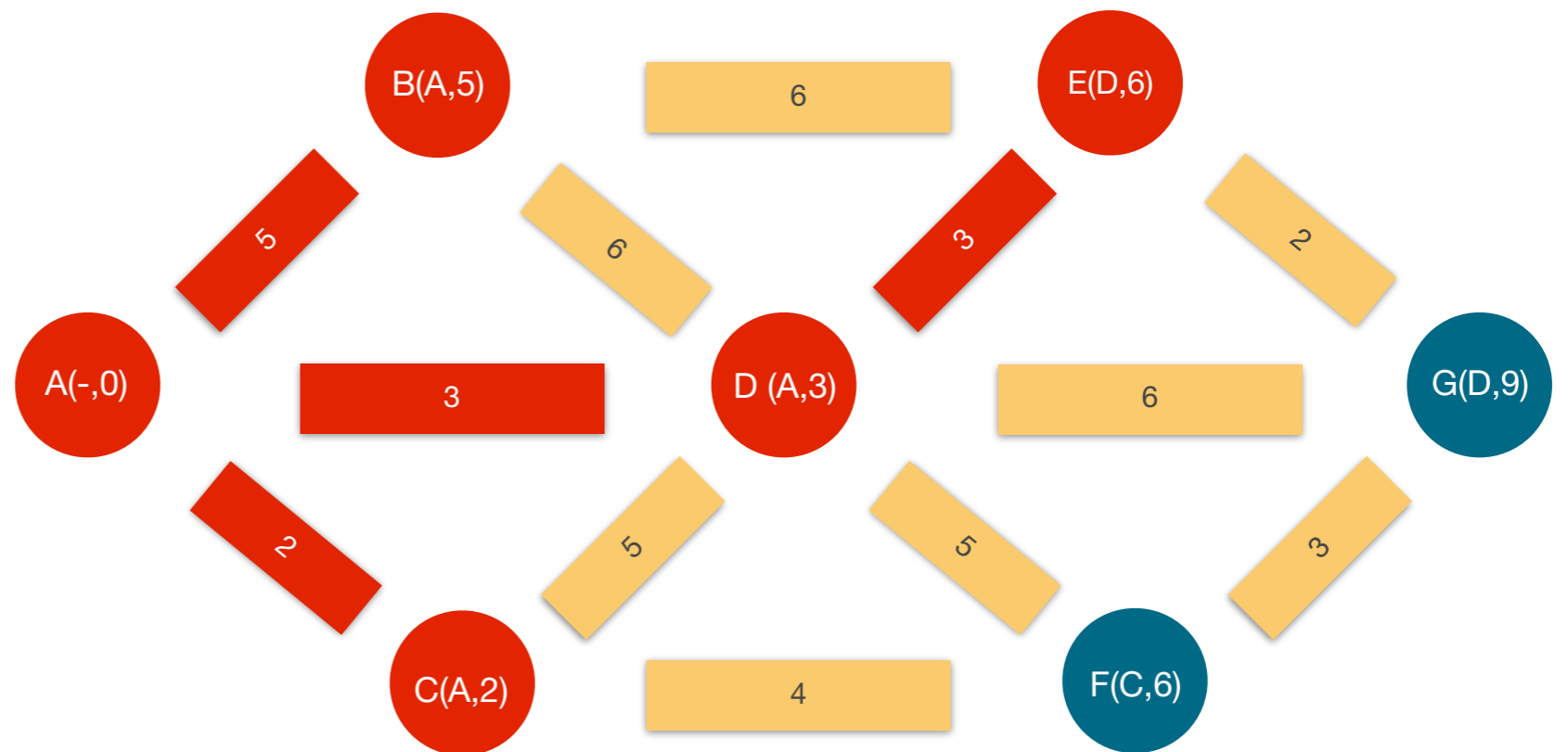
Στη συνέχεια, βλέπουμε τους επόμενους από τον κόμβο E, τον κόμβο G ο οποίος έχει νέο βάρος,

Κόμβος G: βάρος κόμβου E + απόσταση E,G = 6+2=8. Λόγω του ότι $8 < 9$ αντικαθιστούμε την ετικέτα με την E,8.

Βήμα 2

Από όλους τους κόμβους F και G ο F έχει τη μικρότερη απόσταση (6), οπότε η ετικέτα του γίνεται μόνιμη.

Επίσης σημειώνουμε την μικρότερη απόσταση με κόκκινο.



Εφαρμογή αλγορίθμου Dijkstra

Βήμα 1

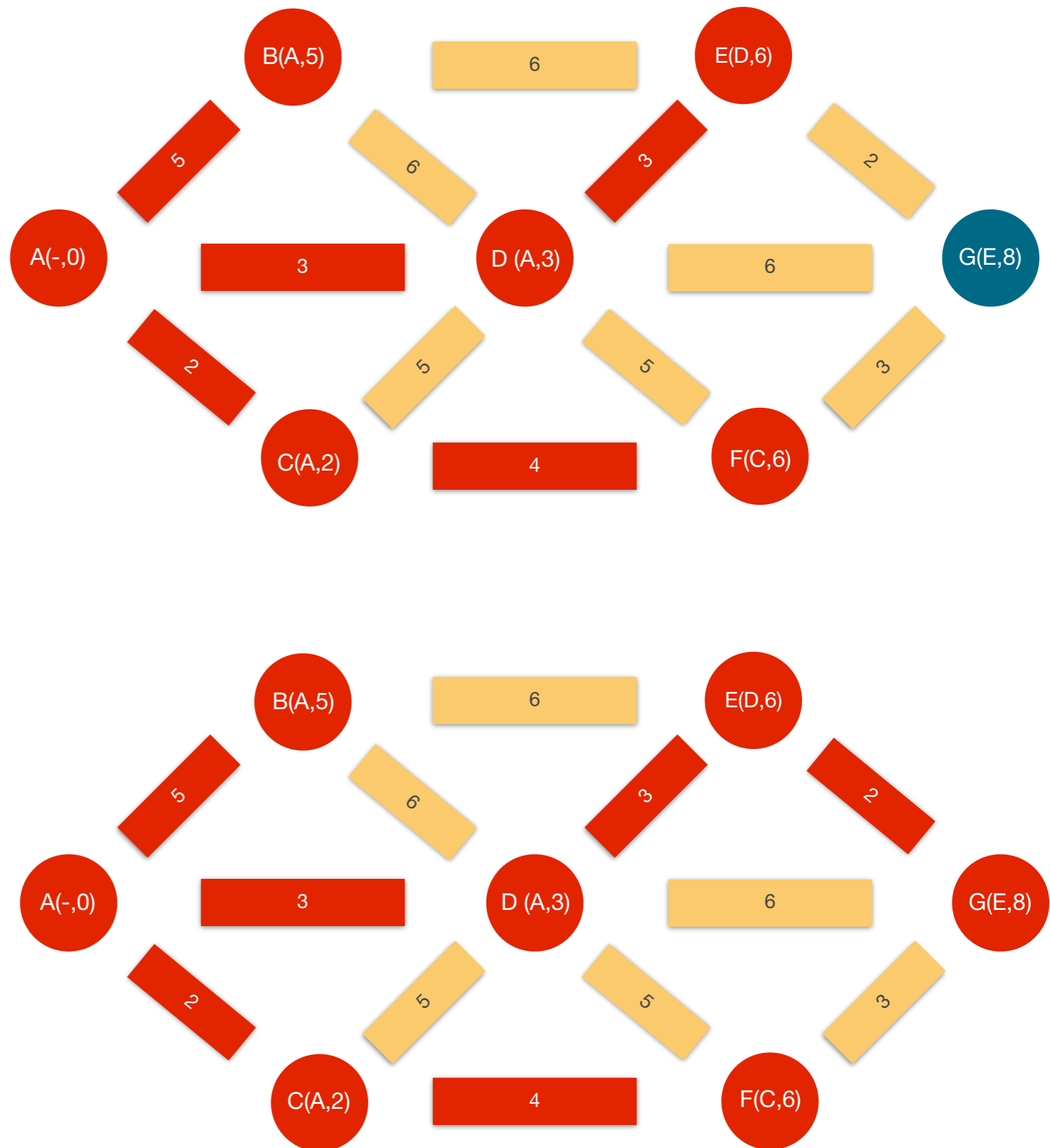
Στη συνέχεια, βλέπουμε τους επόμενους από τον κόμβο F, τον κόμβο G ο οποίος έχει νέο βάρος,

Κόμβος G: βάρος κόμβου F + απόσταση F,G = 6+3=9. Λόγω του ότι $9 < 8$ δεν αντικαθιστούμε την ετικέτα.

Βήμα 2

Από όλους τους κόμβους G έχει τη μικρότερη απόσταση (8) και έχει μείνει τελευταίος, οπότε η ετικέτα του γίνεται μόνιμη.

Επίσης σημειώνουμε την μικρότερη απόσταση με κόκκινο.



Εφαρμογή αλγορίθμου Dijkstra

Διαπιστώσεις

1. Η μικρότερη απόσταση από το A στο G είναι η απόσταση A-D-E-G με βάρος 8.
2. Όλοι οι κόμβοι έχουν μόνιμες ετικέτες.
3. Όλες οι αποστάσεις από το A στους υπόλοιπους κόμβους έχουν σημειωθεί με το μικρότερο βάρος.

